CORSO DI
RELAZIONI ECONOMICHE E FINANZIARIE INTERNAZIONALI E COOPERAZIONE ALLO SVILUPPO

Anno Accademico 2015-2016

PARTE D

ECONOMIA DELLA CRESCITA E DELLO SVILUPPO

~

Il modello di crescita neoclassico

Jacopo Zotti

Sommario

PARTE I – I fondamenti della teoria della crescita

1. Introduzione e motivazione
2. I fatti stilizzati della crescita economica
3. Concetti di base
4. I modelli ad un solo settore (in generale)

PARTE II - Il modello di crescita neoclassico

1. La funzione di produzione dell'impresa rappresentativa
2. Il modello di Solow

PARTE I
Le nozioni fondamentali della teoria della crescita

1. Introduzione e motivazione

La teoria della crescita e l'economia politica

Teoria della crescita = branca della macroeconomia

Macroeconomia → studia l'economia a livello aggregato:

- Come si determina il **PIL**?
- Come si spiega la **disoccupazione**?
- Quali sono le ragioni dell'**inflazione**?

Teoria della crescita → studia l'economia a livello aggregato:

- Come si determina la crescita del **PIL**?

↓

Perché cresce un'economia?
Perché ci sono economie ricche ed economie "povere"?

Ambito di indagine della Teoria della crescita

Obiettivo della teoria della crescita:
formalizzare modelli che spieghino come si origina la crescita.

Alla teoria della crescita interessa solamente il processo di crescita di un'economia $\Rightarrow$ i modelli di crescita sono molto semplici.

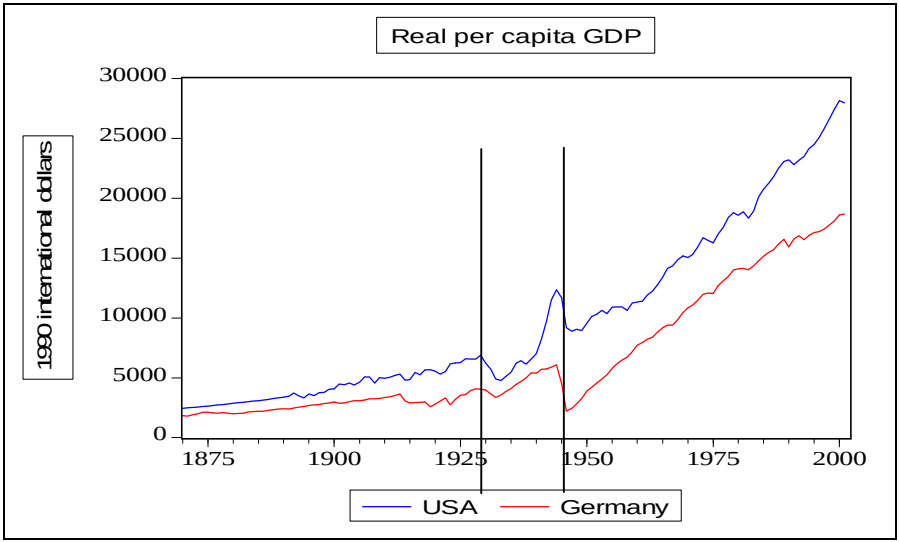
$\Downarrow$

Omissione del settore pubblico, delle relazioni internazionali, …

Variabile centrale della teoria della crescita:

PRODOTTO REALE PRO-CAPITE

Perché è importante la crescita?



Germania: 1913 → 3.648 $
2001 → 18.677 $ (88 anni)

⇓

Tasso di crescita medio: 1,86%

Altri tassi di crescita del PIL reale pro-capite:
(1913-2001, Valori annuali medi)

USA	**1,89%**
Svizzera	1,88%
Filippine	0,94%
Myanmar	0,82%
Argentina	0,87%

Corea del Sud	3,28%
Giappone	3,07%
Portogallo	2,76%
Finlandia	2,58%

Germania: 1913 → 3.648 $

Ipotesi: tasso di crescita inferiore di un punto percentuale: 0,86%
(come Filippine, Myanmar, Argentina):

⇓

2001 → 7.750 $ (88 anni)

(livello di PIL pari a Ungheria, Polonia, Uruguay, Malesia)

Ipotesi alternativa: tasso di crescita superiore di un punto percentuale: 2,86%
(come Portogallo, Giappone, Finlandia):

$\Downarrow$

2001 → 43.626 $ (88 anni)

Con un tasso di crescita dell‘1,8% la Germania raggiunge il livello di 43.626 $ nel 2047

$\Downarrow$

PICCOLE differenze nei tassi di crescita annuali hanno effetti cruciali nel lungo periodo!

Uno sguardo al mondo

Tassi di crescita medi (non ponderati):

1901-2001 (31 stati): 1,80%

1913-2001 (68 stati): 1,75%

1950-2001 (145 stati): 1,68%

Tasso di crescita medio (ponderato con la popolazione media nel periodo 1950-2001):

1950-2001 (145 stati): 1,70%

I tassi di crescita più bassi e i più elevati (1950-2001):

Qatar	-2,6%
Kuwait	-2,1%
Zaire	-2,0%
Sierra Leone	-1,0%

Botswana	5,0%
Taiwan	5,6%
Corea del Sud	5,8%
Guinea Equatoriale	6,0%

Gli stati più poveri del mondo nel 2001:

Zaire	202 $	(1950: 570 $)
Sierra Leone	386 $	(1950: 656 $)
Ciad	445 $	(1950: 476 $)

Ipotesi: questi paesi crescano con un tasso dell‘1,7% (media mondiale):

Numero di anni necessari a raggiungere il livello di PIL pro-capite della Germania nel 2001 (18.677 $)

Zaire	266 anni
Sierra Leone	228 anni
Ciad	215 anni

Ipotesi: questi paesi crescano con un tasso del medo del 2,7%
(come il Portogallo):

Numero di anni necessari a raggiungere il livello di PIL pro-capite della Germania nel 2001 (18.677 $)

Zaire	167 anni	(circa 100 anni prima!)
Sierra Leone	143 anni	(circa 85 anni prima!)
Tschad	138 anni	(circa 80 anni prima!)

$\Downarrow$

Perché crescono gli stati?

Perché stati diversi crescono con tassi di crescita diversi?

PARTE I
Le nozioni fondamentali della teoria della crescita

2. I fatti stilizzati della crescita economica

Fatti stilizzati = regolarità empiriche

Fatti stilizzati (Kaldor (1963)):

1. Il prodotto pro-capite cresce nel tempo, il tasso di crescita non è decrescente.

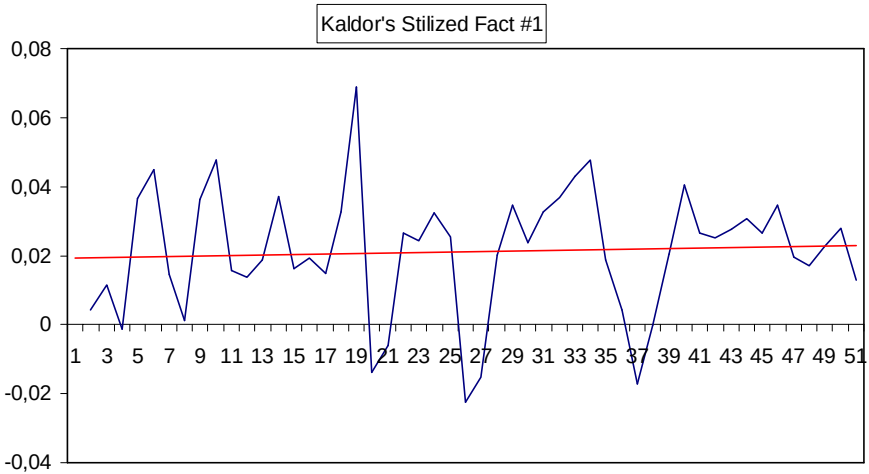
2. Lo stock di capitale per lavoratore cresce nel corso del tempo.

3. Il tasso di remunerazione del capitale è pressoché costante.

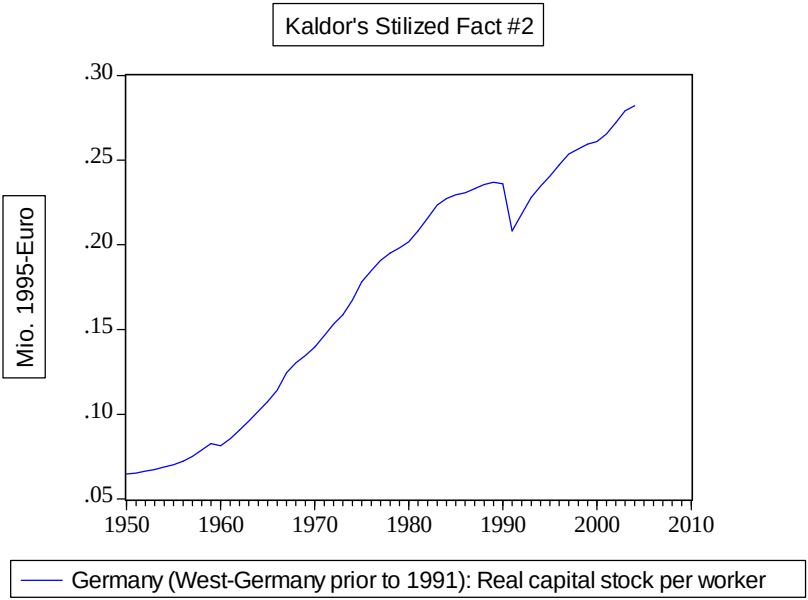
4. Il rapporto tra stock di capitale e output è pressoché costante.

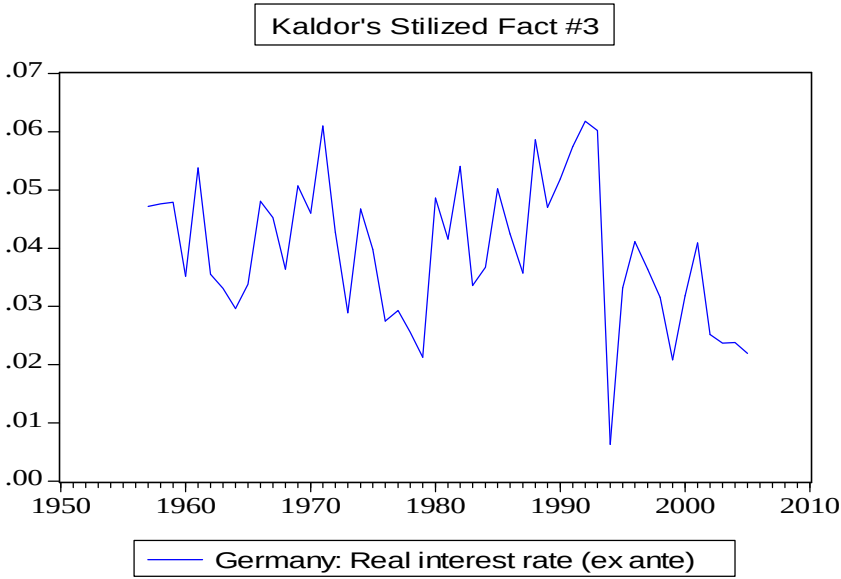
5. La quota di prodotto riservata ai redditi da lavoro e ai redditi da capitale è pressoché costante.

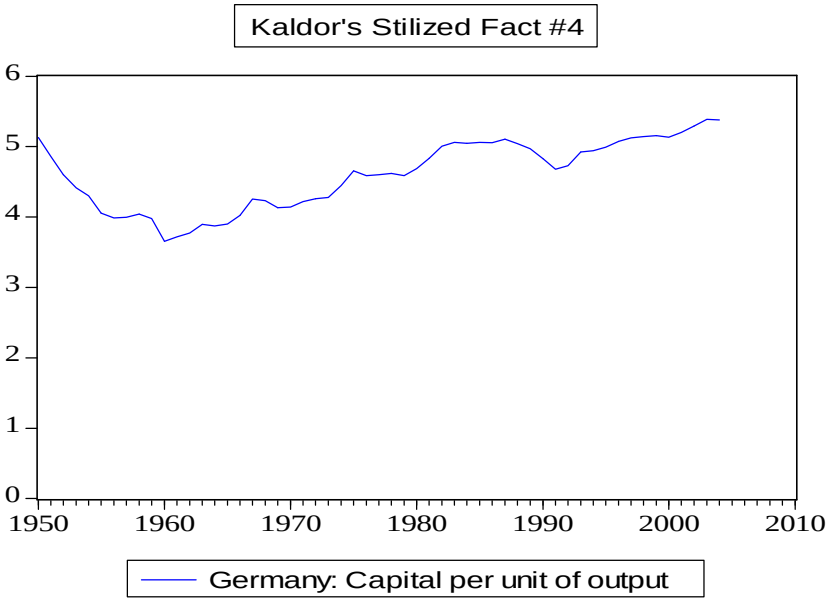
6. Il tasso di crescita del prodotto pro-capite è molto variegato

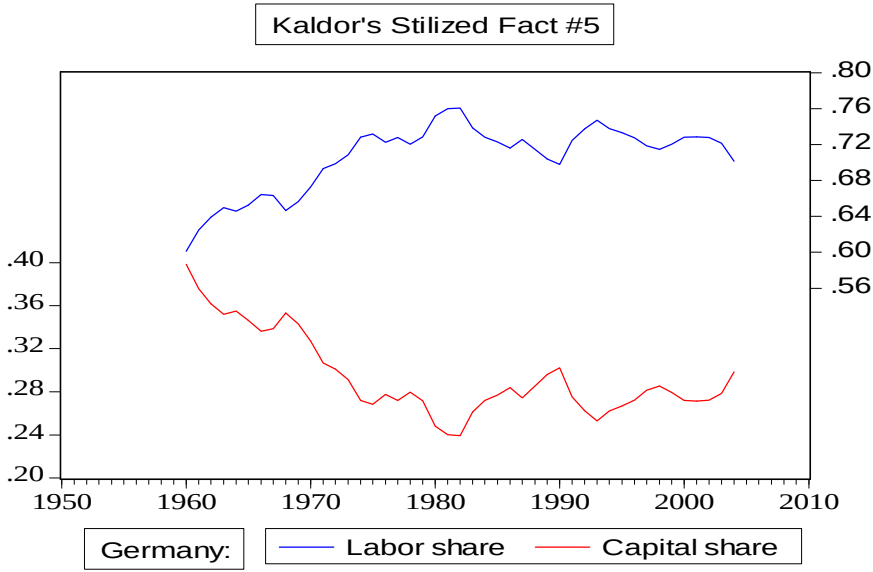


UK real per capita GDP growth rate (1955-2005)


Kaldor's Stilized Fact #2
Mio. 1995-Euro
.30
.25
.20
.15
.10
.05
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
Germany (West-Germany prior to 1991): Real capital stock per worker


Kaldor's Stilized Fact #3
.07
.06
.05
.04
.03
.02
.01
.00
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
Germany: Real interest rate (ex ante)


Kaldor's Stilized Fact #4
6
5
4
3
2
1
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
Germany: Capital per unit of output


Kaldor's Stilized Fact #5
.80
.76
.72
.68
.64
.60
.56
.40
.36
.32
.28
.24
.20
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
Germany:
Labor share
Capital share

Letteratura

Kaldor, N. (1963): *Capital Accumulation and Economic Growth*, in: Friedrich A. Lutz and Douglas C. Hague, eds.., Proceedings of Conference Held by the International Economics Association, London, McMillan.

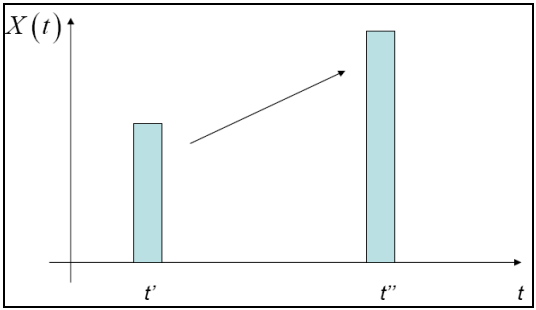
Maddison, A. (1982): *Phases of Capitalist Development*, Oxford University Press.

PARTE I
Le nozioni fondamentali della teoria della crescita

3. Nozioni fondamentali

Concetto di crescita. La variabile tempo

Crescita = Variazione nel tempo



$$\Downarrow$$

La teoria della crescita richiede una dimensione temporale:

$$X(t') \neq X(t'')$$

$\Downarrow$

Ogni variabile deve essere corredata con un'indicazione temporale:

$$X(t)$$

$+$

In ogni modello* il tempo deve esser incluso come variabile.

$\Leftrightarrow$

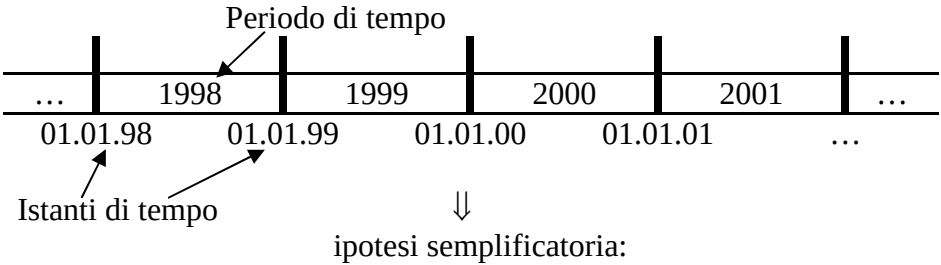
Ogni modello di crescita è un <u>modello dinamico</u>!

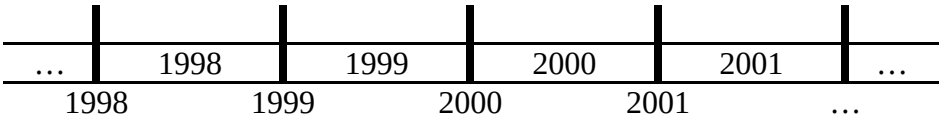
---

* *modello* = rappresentazione matematica di un aspetto della realtà

La rappresentazione modellistica della variabile tempo

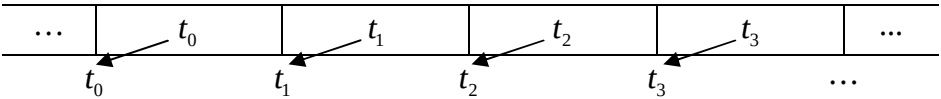
Il tempo nella realtà (esempio: intervalli annuali):





Quindi: nome del periodo = nome del suo istante iniziale

In generale:



$$\boxed{t_{i+1} = t_i + \Delta t}$$

dove:

t_i = istante di tempo (= inizio del periodo t_i)

Δt = periodo di tempo (= distanza tra inizio del periodo t_i e quello del periodo t_{i+1})

Le altre variabili del modello e la variabile tempo

Grandezze di stock	Grandezze di flusso
Popolazione $\rightarrow L(t)$	Reddito $\rightarrow Y(t)$
Stock di capitale $\rightarrow K(t)$	Risparmio $\rightarrow S(t)$
Patrimonio (*asset*) $\rightarrow A(t)$	Consumo $\rightarrow C(t)$
Consistenza all'**inizio** del periodo *t*	Flusso **nel corso** del periodo *t*

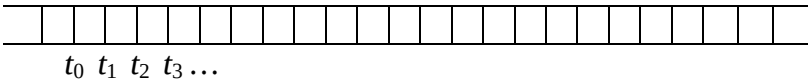
Questo vale sempre, indipendentemente dalla lunghezza del periodo *t*

$$\Downarrow$$

DUE ipotesi possibili:

Tempo discreto	Tempo continuo
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Lunghezza dei periodi finita: $\Delta t = t_{i+1} - t_i$	Lunghezza dei periodi infinitesima: $\Delta t \longrightarrow 0$

Nel caso di tempo continuo:



$$\Downarrow$$

Ogni variabile è una variabile continua della variabile tempo:

$$X = X(t)$$

Attenzione!
Ciò non esclude che una variabile dipenda anche da altre variabili.

Esempio:

$$Y = F(K, L)$$

$$\downarrow$$

In un modello dinamico: $K = K(t)$ e $L = L(t)$

$$Y = Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right]$$

<u>Definizione:</u> Incremento della variabile $X(t)$ nel tempo:

$$\frac{dX(t)}{dt} \Leftrightarrow X'(t)$$

Notazione: Usiamo un puntino per indicare la variazione nel tempo:

$$\dot{X}(t) \equiv \frac{dX(t)}{dt}$$

Definizione: Tasso di crescita (TC)

Il tasso di crescita della variabile $X(t)$ è l'incremento percentuale della medesima, calcolato sulla base del suo livello iniziale:

$$\gamma_X(t) := \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = \frac{\frac{dX(t)}{dt}}{X(t)} \qquad (1)$$

Nota bene: $\gamma_X(t)$ è una funzione de tempo *t*, quindi è una variabile!

Parametri, variabili esogene e variabili endogene

In un modello (= sistema di equazioni) ci sono solo quattro tipi di grandezze:

1. parametri
2. variabili *esogene*
3. variabili *endogene*
4. variabili *endogene dinamiche*

1. Parametri:
Grandezze che rimangono costanti nel corso del tempo

Esempio: la propensione marginale al risparmio s o il tasso di ammortamento δ :

$$s(t) = s \qquad \forall t \geq 0$$

$$\delta(t) = \delta \qquad \forall t \geq 0$$

2. Variabili *esogene*:
Variabili determinate al di *fuori* del modello e, quindi, note

Esempio: la popolazione $L(t)$:

$$L(t_0) = \bar{L}$$

Il TC delle variabili esogene è costante: $\gamma_L(t) = n, \ \forall t \geq 0$

3. Variabili *endogene*: Variabili determinate all'*interno* del modello, attraverso un'equazione statica

Esempio: L'output $Y(t)$:

$$Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right]$$

<u>Nota bene:</u> questa equazione è detta *statica*, dato che non contiene incrementi di variabili

Il TC, solitamente, non è costante: $\gamma_Y = \gamma_Y(t)$

… e dipende dal tasso di crescita delle variabili endogene dinamiche, come nel seguente caso:

$$\gamma_Y(t) = \gamma_Y\left[\gamma_K(t)\right]$$

4. Variabili *endogene dinamiche*: Variabili determinate all'*interno* del modello, attraverso un'equazione dinamica

Esempio: lo stock di capitale $K(t)$:

$$\dot{K}(t) = f\left[K(t)\right]$$

<u>Nota bene:</u> questa equazione è detta *dinamica*, perché contiene incrementi di variabili.

Il TC, solitamente, non è costante: $\gamma_K = \gamma_K(t)$

… e dipende dalle varabili endogene dinamiche, come nel seguente caso:

$$\gamma_K(t) = \gamma_K\left[K(t)\right]$$

Variabili aggregate e variabili pro-capite

Intuizione: l'Italia è un paese ricco, l'India un paese povero.

PIL reale nel 2008:

Italia	1.158 miliardi di dollari internazionali
India	3.415 miliardi di dollari internazionali

?

PIL reale pro-capite (2008):

Italia	19.909 di dollari internazionali
India	2.975 di dollari internazionali

⇓

Bisogna considerare valori pro capite!

Crescita del reddito e della popolazione:

Tassi di crescita medi (1950-2001):

	PIL aggregato	Popolazione	PIL pro-capite
Qatar	4,2%	6,7%	-2,6%
Kuwait	3,1%	5,2%	-2,1%
Zaire	0,7%	2,7%	-2,0%
Sierra Leone	0,8%	1,9%	-1,0%
Botswana	7,6%	2,6%	5,0%
Taiwan	7,6%	2,0%	5,6%
Corea del Sud	7,4%	1,6%	5,8%
Guinea Equatoriale	7,6%	1,6%	6,0%

<u>Definizione:</u> Variabile pro-capite

$$x(t) := \frac{X(t)}{L(t)} \qquad (2)$$

Esempi:

Intensità di capitale: $k(t) := \frac{K(t)}{L(t)}$

PIL pro-capite: $y(t) := \frac{Y(t)}{L(t)}$

Tasso di crescita di una variabile pro-capite $x(t)$

La variabile pro-capite è, per definizione:

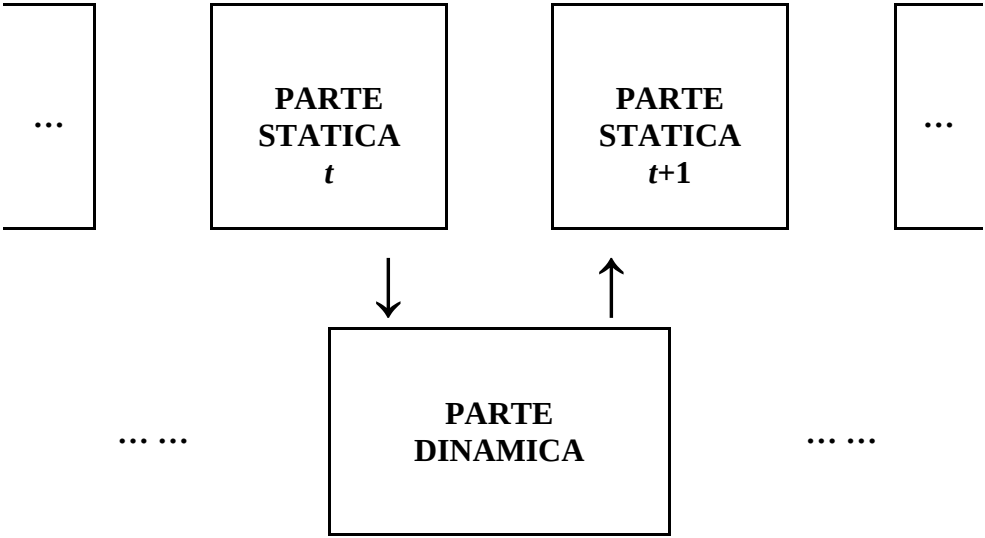
$$x(t) := \frac{X(t)}{L(t)}$$

Derivando rispetto al tempo e ricordando la "regola del quoziente" si ottiene:

$$\boxed{\gamma_x(t) = \gamma_X(t) - n} \qquad (3)$$

"Il tasso di crescita di una variabile pro-capite è pari alla differenza tra tasso di crescita della medesima variabile aggregata e il tasso di crescita della popolazione."

Struttura di un modello di crescita



Parte statica → descrive il sistema economico in un certo istante t

→ determina il valore delle variabili endogene in funzione delle variabili endogene dinamiche

Esempio di <u>equazioni statiche:</u> $y(t) = y\left[k(t)\right],\ c(t) = c\left[y(t)\right]$

Parte dinamica → descrive il sistema economico al trascorrere del tempo dall'istante t all'istante $t+1$

→ determina la variazione delle variabili dinamiche endogene nell'istante t

Esempio di <u>equazioni dinamiche:</u> $\dot{k}(t) = f\left[k(t)\right]$

PARTE I – I fondamenti della teoria della crescita

4. I modelli ad un solo settore (in generale)

Tutti i modelli rappresentano la **MEDESIMA ECONOMIA**:

$\Downarrow$

Attori economici e mercati sono i **medesimi**!

Qual è allora la differenza tra i questi modelli?

UNA SOLA DIFFERENZA:
IL COMPORTAMENTO DELLE IMPRESE

e cioè:

LA FUNZIONE DI PRODUZIONE

$\neq$ funzioni di produzione $\Leftrightarrow$ $\neq$ modelli

La parte statica

Il sistema di equazioni a-temporale che costituisce la parte statica rappresenta il seguente sistema economico:

IMPRESE

MERCATI DEI FATTORI PRODUTTIVI (capitale e lavoro)

MERCATO DEI BENI (un solo bene!)

PRIVATI

Il sistema di equazioni a-temporale rappresenta:

1. il comportamento degli agenti,
2. le condizioni di equilibrio sui mercati

$$\begin{cases} Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right] \\ Y(t) = C(t) + I(t) \\ L(t) = \overline{L} \cdot e^{n \cdot t} \\ I(t) = S(t) \\ S(t) = s \cdot Y(t) \end{cases}$$

$$Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right] \qquad (4) \qquad \leftarrow$$ Funzione di produzione

$$Y(t) = C(t) + I(t) \qquad (5) \qquad \leftarrow$$ Condizione di equilibrio sul mercato dei beni

(L'output viene o consumato o investito.)

$$L(t) = \bar{L} \cdot e^{n \cdot t} \qquad (6) \qquad \leftarrow$$ Offerta di lavoro

(Ipotesi comportamentale: tasso di crescita della popolazione costante)

$$I(t) = S(t) \qquad (7) \qquad \leftarrow$$ Condizione di equilibrio sul mercato del capitale

$$S(t) = s \cdot Y(t) \qquad (8) \qquad \leftarrow$$ Funzione di risparmio dei privati

(Ipotesi comportamentali: propensione marginale a consumare costante, $0<s<1$.)

La parte dinamica

Il sistema di equazioni intertemporale è costituito da una sola equazione:

Equazione di accumulazione del capitale: $\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$ (9)

dove:

$I(t)$ = investimenti lordi

$\delta =$ tasso di ammortamento (deprezzamento), $0<\delta<1$

Domanda:
Quante sono le variabili endogene dinamiche di questo modello?

Il tasso di crescita dello stock di capitale (aggregato)

Si consideri l'equazione di accumulazione del capitale (9):

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta \cdot K(t)$$

Condizione di equilibrio sul mercato del capitale (7): $I(t) = S(t)$

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta \cdot K(t)$$

Funzione di risparmio (8): $S(t) = s \cdot Y(t)$

$$\dot{K}(t) = s \cdot Y(t) - \delta \cdot K(t)$$

Funzione di produzione (4):

$$\dot{K}(t) = s \cdot F\left[K(t), L(t)\right] - \delta \cdot K(t)$$

Divisione per $K(t)$:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s \cdot \frac{F\left[K(t), L(t)\right]}{K(t)} - \delta$$

Definizione di TC (2): $\gamma_X(t) := \dfrac{\dot{X}(t)}{X(t)}$

$$\boxed{\gamma_K(t) = s \cdot \frac{F\left[K(t), L(t)\right]}{K(t)} - \delta}$$

$$\Downarrow$$

Il TC del capitale è…

1. una variabile che dipende dal tempo (chiaro! Vedi lucido 36)

2. una variabile che dipende dal capitale stesso:

$$\gamma_K = s \cdot \frac{F(K,L)}{K} - \delta \qquad (10)$$

Se $L = \bar{L}$:

$$\gamma_K = s \cdot \frac{F(K,\bar{L})}{K} - \delta$$

$$\gamma_K = \gamma_K(K)$$

"Per un certo valore del lavoro, il tasso di crescita del capitale dipende esclusivamente dal livello del suo stock."

(Ovviamente: *"… in corrispondenza di un certo istante t"*)

Dall'equazione (10)

$$\gamma_K = s \cdot \frac{F(K,L)}{K} - \delta$$

si deduce che, da ora in poi,

"Di notte tutte le vacche sono nere." (G. W. F. Hegel)

PARTE II – Il modello di crescita neoclassico

1. La funzione di produzione dell'impresa rappresentativa

La funzione di produzione neoclassica

$$Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right]$$

$$\downarrow$$

$$Y = F(K, L)$$

<u>Definizione:</u> Funzione di produzione neoclassica

Una funzione di produzione $F(K, L)$ è neoclassica se soddisfa alle seguenti proprietà:

1. rendimenti di scala costanti
2. rendimenti marginali positivi e decrescenti
3. condizioni di Inada

Proprietà 1: Rendimenti di scala costanti

Una funzione di produzione $F(K,L)$ presenta rendimenti di scala costanti se

$$F(\lambda \cdot K, \lambda \cdot L) = \lambda \cdot F(K,L) \qquad \forall \lambda \geq 0$$

Intuizione:
Due stabilimenti uguali producono esattamente il doppio di quanto prodotto da ciascuno dei due.

Esempio notevole: $F(K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$

$$A \cdot (\lambda \cdot K)^{\alpha} \cdot (\lambda \cdot L)^{1-\alpha} = \lambda \cdot \left(A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}\right)$$

Un'applicazione importante: la funzione di produzione pro-capite

$$A\cdot(\lambda\cdot K)^{\alpha}\cdot(\lambda\cdot L)^{1-\alpha}=\lambda\cdot\left(A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}\right)$$

$$\rightarrow\lambda=\frac{1}{L}\leftarrow$$

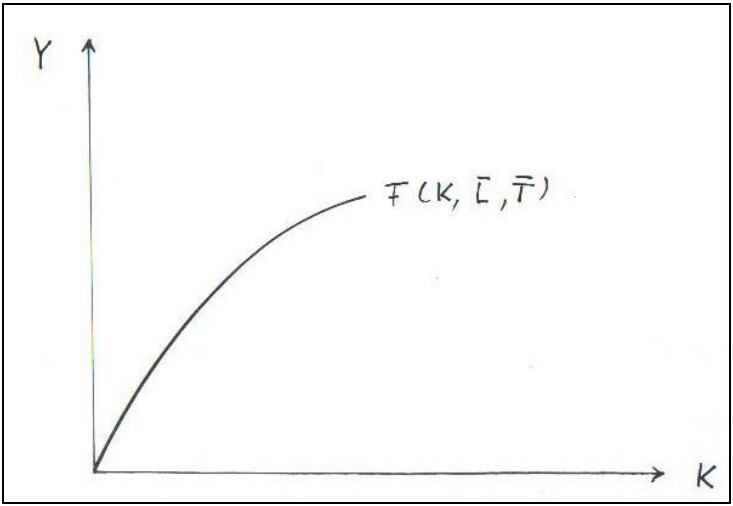
$$A\cdot\left(\frac{1}{L}\cdot K\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{L}\cdot L\right)^{1-\alpha}=\frac{1}{L}\cdot\left(A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}\right)$$

$$A\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=\frac{1}{L}\cdot\left(A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}\right)$$

$$A\cdot k^{\alpha}=\frac{1}{L}\cdot Y$$

$$f(k)=y=A\cdot k^{\alpha} \qquad (11)$$

Proprietà 2: Rendimenti marginali positivi e decrescenti



<u>Proprietà 3:</u> Condizioni di Inada

Una funzione di produzione $F(K,L)$ soddisfa alle condizioni di Inada se

$$\lim_{K \to 0} F_K = \lim_{L \to 0} F_L = \infty$$

$$\lim_{K \to +\infty} F_K = \lim_{L \to +\infty} F_L = 0$$

PARTE II – Il modello di crescita neoclassico

2. Il modello di Solow

Struttura del modello

$$\begin{cases} Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right] \\ Y(t) = C(t) + I(t) \\ L(t) = \bar{L} \cdot e^{n \cdot t} \\ I(t) = S(t) \\ S(t) = s \cdot Y(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Y(t) = A\left[K(t)\right]^{\alpha}\left[L(t)\right]^{1-\alpha} \\ Y(t) = C(t) + I(t) \\ L(t) = \bar{L} \cdot e^{n \cdot t} \\ I(t) = S(t) \\ S(t) = s \cdot Y(t) \end{cases}$$

$$+$$

$$\gamma_K = s \cdot \frac{F(K, L)}{K} - \delta \longrightarrow \gamma_K = s \cdot \frac{A \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{K} - \delta$$

La parte dinamica:
l'equazione fondamentale della teoria della crescita neoclassica

$$\gamma_K = s \cdot \frac{Y}{K} - \delta$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_K = s \cdot \frac{\frac{Y}{L}}{\frac{K}{L}} - \delta$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_K = s \cdot \frac{y}{k} - \delta$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_K - n = s \cdot \frac{y}{k} - \delta - n$$

$$\gamma_k = \gamma_K - n \longrightarrow$$

$$\gamma_k = s \cdot \frac{y}{k} - \delta - n$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \cdot \frac{y}{k} - \delta - n$$

$$\dot{k} = s \cdot y - \delta \cdot k - n \cdot k$$

$$\dot{k} = s \cdot y - (\delta + n) k \qquad (12)$$

Equazione fondamentale della teoria della crescita neoclassica

Il significato economico dell'equazione fondamentale

$\dot{k}$ = Variazione del capitale pro-capite
=
Investimenti **<u>netti</u>** pro capite

Questa variazione è il risultato della seguente differenza

1. $s \cdot y$ = risparmio pro-capite (=investimenti lordi pro capite)

–

2. nk = quantità di output necessaria per dotare i nuovi lavoratori della medesima quantità di capitale.

3. δk = quantità di output necessaria per sostituire il capitale usurato

Variazione positiva e negativa del capitale pro-capite

<u>LA</u> domanda è: Quando $\dot{k}$ è positivo e quando negativo?

$$\dot{k} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot f(k) - (n+\delta)k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot f(k) > (n+\delta)k$$

$$\dot{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot f(k) - (n+\delta)k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot f(k) < (n+\delta)k$$

$$\Downarrow$$

se k è "piccolo" $\Rightarrow \dot{k} > 0$

se k è "grande" $\Rightarrow \dot{k} < 0$

$$+$$

se $k = k^* \Rightarrow \dot{k} = 0$

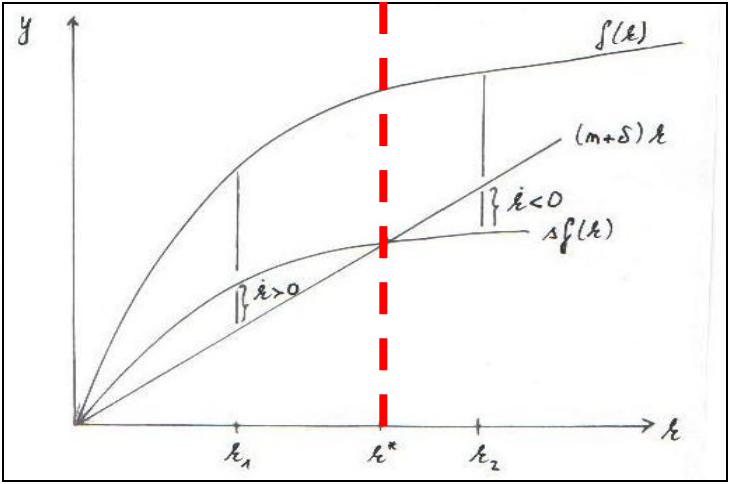
$$\Downarrow$$

Il modello di Solow converge da qualunque valore iniziale $k > 0$ al punto di stato stazionario k^*.

k^* = capitale pro-capite in stato stazionario

DUE SITUAZIONI POSSIBILI:

$k = k^* \longrightarrow \dot{k} = 0$	$\longrightarrow$	**STATO STAZIONARIO**
$k \neq k^* \longrightarrow \dot{k} \neq 0$	$\longrightarrow$	**DINAMICA TRANSITORIA**


y
f(k)
(m+δ)k
k̇<0
sf(k)
k̇>0
k
k₁
k*
k₂

Lo stato stazionario

<u>Definizione:</u> stato stazionario

Si dice stato stazionario quella condizione nella quale tutte le variabili **endogene** crescono con un tasso di crescita costante.

$$k = k^* \Rightarrow \gamma_k\left(k^*\right) = 0 \qquad (13)$$

"In stato stazionario il tasso di crescita del capitale pro-capite è zero."

I tassi di crescita delle altre variabili

$$\boxed{\begin{cases} Y(t) = F\left[K(t), L(t)\right] \\ Y(t) = C(t) + I(t) \\ L(t) = \bar{L} \cdot e^{n \cdot t} \\ I(t) = S(t) \\ S(t) = s \cdot Y(t) \end{cases} \\ + \\ \dot{K} = s \cdot F(K, L) - \delta K} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} K(t), Y(t), C(t), I(t), S(t) \\ \\ k(t), y(t), c(t), i(t), s(t) \end{cases}}$$

1. Tasso di crescita del capitale aggregato

Equazione (13): $\gamma_k\left(k^*\right)=0$.

Equazione (3): $\gamma_K=\gamma_k+n$.

Quindi:

$$\gamma_K=n$$

2. Tasso di crescita del reddito pro-capite

Equazione (13): $\gamma_k\left(k^*\right)=0$.

Equazione (11): $y=f\left(k\right)$.

Quindi:

$$\gamma_y = 0$$

<u>3. Tasso di crescita del prodotto aggregato:</u>

$$\gamma_Y = \gamma_L + \gamma_y = n$$

<u>4. Altri tassi di crescita:</u>

$$\gamma_C = \gamma_S = \gamma_I = \gamma_Y = n$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_c = \gamma_s = \gamma_i = \gamma_y = 0$$

$$\Downarrow$$

1. Tutte le variabili endogene crescono con TC costante.
2. Le variabili aggregate crescono con il tasso di crescita *n*.
3. Le corrispondenti variabili pro-capite NON crescono.

$\Downarrow$

I TC non sono necessariamente uguali!

Uno sguardo alla politica della crescita

In stato stazionario, il TC di tutte le variabili $K(t), Y(t), C(t), I(t), S(t)$ è pari ad *n*.

$$\Downarrow$$

Se *n* non è modificabile,
non esiste nessuna politica della crescita in stato stazionario!

Il livello della propensione marginale a risparmiare *s* o il tasso di ammortamento sono quindi irrilevanti?

<u>NO:</u>
Parametri quali *s* e δ non influenzano i TC in stato stazionario, determinano tuttavia il livello delle variabili!

I parametri e il livello del capitale in stato stazionario

Equazione fondamentale della teoria della crescita neoclassica (12):

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) k$$

Funzione di produzione Cobb-Douglas:

$$\dot{k} = s \cdot A k^{\alpha} - (n + \delta) k$$

Stato stazionario significa $\dot{k} = 0$. Quindi

$$s \cdot A (k^*)^{\alpha} - (n + \delta) k^* = 0$$

$$s \cdot A\left(k^*\right)^{\alpha} = \left(n+\delta\right)k^*$$

$$\frac{s \cdot A\left(k^*\right)^{\alpha}}{\left(k^*\right)^{\alpha}} = \frac{\left(n+\delta\right)k^*}{\left(k^*\right)^{\alpha}}$$

$$s \cdot A = \left(n+\delta\right)k^*\left(k^*\right)^{-\alpha}$$

$$s \cdot A = \left(n+\delta\right)\left(k^*\right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{s \cdot A}{n+\delta} = \left(k^*\right)^{1-\alpha}$$

$$\left[\frac{s \cdot A}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\left(k^*\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k^* = \left(\frac{s \cdot A}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

s	$\uparrow$ $(\downarrow)$	$\Rightarrow$	k^*	$\uparrow$ $(\downarrow)$	$\Rightarrow$	y^*	$\uparrow$ $(\downarrow)$
n	$\uparrow$ $(\downarrow)$	$\Rightarrow$	k^*	$\downarrow$ $(\uparrow)$	$\Rightarrow$	y^*	$\downarrow$ $(\uparrow)$
δ	$\uparrow$ $(\downarrow)$	$\Rightarrow$	k^*	$\downarrow$ $(\uparrow)$	$\Rightarrow$	y^*	$\downarrow$ $(\uparrow)$

Letteratura

Solow, R.M. (1956): *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economic, 70, 1, 65-94.

Swan, T.W. (1956): *Economic Growth and Capital Accumulation*, Economic Review, 32, 334-361.